

Γιώργος Πρέσβης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> :

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Φροντιστήρια

ανέλιξη

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### 1η Κατηγορία : Ο Κύκλος και τα στοιχεία του

**1.1** Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

$$i) \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4 \qquad ii) \quad x^2 + (y+\sqrt{2})^2 = 5$$

$$iii) \quad (x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = \gamma^2$$

**Λύση:**

i) Η εξίσωση  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$  γράφεται ισοδύναμα  $(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 2^2$  και παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(2, -3)$  και ακτίνα  $\rho=2$ .

#### ΜΕΘΟΔΟΣ

Ο κύκλος με εξίσωση

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

έχει κέντρο το σημείο

$K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho > 0$

ii) Η εξίσωση  $x^2 + (y+\sqrt{2})^2 = 5$  γράφεται ισοδύναμα

$$(x-0)^2 + (y-(-\sqrt{2}))^2 = (\sqrt{5})^2 \text{ και παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο}$$

$$K(0, -\sqrt{2}) \text{ και ακτίνα } \rho = \sqrt{5}.$$

iii) Η εξίσωση  $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = \gamma^2$  γράφεται ισοδύναμα

$$(x-(-\alpha))^2 + (y-(-\beta))^2 = \gamma^2 \text{ και παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο}$$

$$K(-\alpha, -\beta) \text{ και ακτίνα } \rho = |\gamma|.$$

**2η Κατηγορία : Εσωτερικά και Εξωτερικά Σημεία Κύκλου**

**1.2** Έστω ο κύκλος  $C$  με εξίσωση  $(x-2)^2 + y^2 = 25$ . Να αποδείξετε ότι:

- i) το σημείο  $A(6, -3)$ , ανήκει στον κύκλο  $C$  αλλά το σημείο  $B(4, 5)$ , δεν ανήκει στον κύκλο αυτό.  
 ii) το σημείο  $B(4, 5)$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

**Λύση:**

- i) Για  $x=6$  και  $y=-3$  έχουμε:

$$(6-2)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25.$$

Άρα το σημείο  $A(6, -3)$ , ανήκει στον κύκλο  $C$ .

Όμοια  $x=4$  και  $y=5$  έχουμε:

$$(4-2)^2 + (5)^2 = 4 + 25 = 29 \neq 25.$$

Άρα το σημείο  $B(4, 5)$ , δεν ανήκει στον κύκλο  $C$ .

- ii) Ο κύκλος  $C$  έχει κέντρο  $K(2, 0)$  και ακτίνα  $\rho=5$ . Η απόσταση του  $B(4, 5)$  από το κέντρο του κύκλου είναι

$$(KB) = \sqrt{(4-2)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{29} > 5$$

οπότε  $(KB) > \rho$ .

Άρα το σημείο  $B(4, 5)$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου  $C$ .

**ΜΕΘΟΔΟΣ**

Δίνεται ο κύκλος  $(C)$  με κέντρο το σημείο

$K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho > 0$ , που έχει εξίσωση  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$ .

- Ένα σημείο  $A(x_1, y_1)$  ανήκει στον κύκλο  $(C)$ , αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου, δηλαδή  $(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 = \rho^2$

- Γενικότερα, για την απόσταση

$$(KA) = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2},$$

ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$(KA) = \rho \Leftrightarrow A \in (C)$$

$$(KA) < \rho \Leftrightarrow A \text{ εσωτερικό του } (C)$$

$$(KA) > \rho \Leftrightarrow A \text{ εξωτερικό του } (C)$$

**3η Κατηγορία : Εύρεση της Εξίσωσης Κύκλου****1.3** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν:

- i) έχει κέντρο  $K(-3,-2)$  και ακτίνα  $\rho=\sqrt{5}$ .
- ii) έχει κέντρο  $K(-3,0)$  και ακτίνα  $\rho=5$ .

**Λύση:**

- i) Ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(-3,-2)$  και ακτίνα  $\rho=\sqrt{5}$  έχει εξίσωση

$$(x-(-3))^2 + (y-(-2))^2 = (\sqrt{5})^2, \text{ δηλαδή}$$

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 5.$$

**ΜΕΘΟΔΟΣ**

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho > 0$  έχει εξίσωση

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

- ii) Ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(-3,0)$  και ακτίνα  $\rho=5$  έχει εξίσωση

$$(x-(-3))^2 + (y-0)^2 = 5^2, \text{ δηλαδή } (x+3)^2 + y^2 = 25$$

**1.4** \* Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) Όταν έχει κέντρο  $K(0,1)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(\sqrt{3},0)$   
 ii) Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα  $A(-1,2)$  και  $B(7,8)$

**Λύση:**

i) Η ακτίνα του κύκλου είναι

$$\rho = (KA) = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

και επομένως η εξίσωση του είναι

$$x^2 + (y-1)^2 = 2^2.$$

ii) Το κέντρο  $K$  του κύκλου είναι το μέσον του  $AB$

και επομένως έχει τετμημένη  $x_0 = \frac{-1+7}{2} = 3$

και τεταγμένη  $y_0 = \frac{2+8}{2} = 5$ , δηλαδή το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο  $K(3,5)$ .

Η ακτίνα του κύκλου είναι

ίση με το μισό της διαμέ-

τρου  $AB$ , δηλαδή:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} AB \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(7+1)^2 + (8-2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{100} = 5. \end{aligned}$$

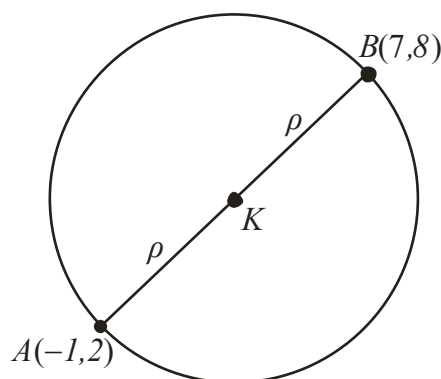
Άρα, η εξίσωση του κύκλου είναι  $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 5^2$ .

### ΜΕΘΟΔΟΣ

Γενικά για να βρούμε την εξίσωση ενός κύκλου, πρέπει από τα δεδομένα του προβλήματος να προσδιορίσουμε το κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και την ακτίνα  $\rho > 0$  του κύκλου.

Τότε ο κύκλος έχει εξίσωση

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$



$K$  μέσο του  $AB$

$$\rho = \frac{1}{2} (AB)$$

**4η Κατηγορία : Γενική Μορφή της Εξίσωσης Κύκλου****1.5** \*Να βρείτε το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

**Λύση:**

Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  είναι της

μορφής  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ , με  $A=4$ ,

$B=-6$  και  $\Gamma=-3$ . Είναι

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4^2 + (-6)^2 - 4(-3) = 64 > 0.$$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο

$K\left(-\frac{4}{2}, -\frac{-6}{2}\right)$  δηλαδή  $K(-2, 3)$  και ακτίνα

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4.$$

**ΜΕΘΟΔΟΣ**

Η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

παριστάνει κύκλο μόνο όταν

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0.$$

Το κέντρο του κύκλου αυτού είναι το

σημείο  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  και η ακτίνα

$$\text{του είναι } \rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$$

**5η Κατηγορία : Σχετική Θέση ευθείας και κύκλου**

**1.6** Δίνεται η ευθεία  $y = \lambda x + \kappa$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  και ο κύκλος  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , με  $\rho > 0$ . Να αποδείξετε ότι:

- i) η ευθεία τέμνει τον κύκλο, αν, και μόνο αν  $\kappa^2 < \rho^2(1 + \lambda^2)$
- ii) η ευθεία εφάπτεται του κύκλου αν, και μόνο αν  $\kappa^2 = \rho^2(1 + \lambda^2)$
- iii) η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, αν, και μόνο αν  $\kappa^2 > \rho^2(1 + \lambda^2)$

**Λύση:**

Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = \rho^2$  έχει κέντρο το σημείο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho > 0$ .

Επίσης η εξίσωση της ευθείας  $y = \lambda x + \kappa$  γράφεται ισοδύναμα  $\lambda x - y + \kappa = 0$ .

Άρα η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ( $\varepsilon$ ) είναι:

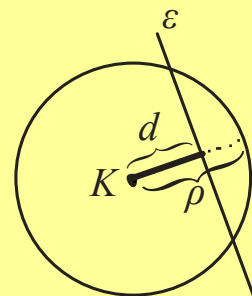
$$d(O, \varepsilon) = \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + \kappa|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|\kappa|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

i) η ευθεία τέμνει τον κύκλο, αν, και μόνο αν:

$$\begin{aligned} d(O, \varepsilon) < \rho &\Leftrightarrow \frac{|\kappa|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} < \rho \\ &\Leftrightarrow |\kappa| < \rho \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 < \rho^2(1 + \lambda^2). \end{aligned}$$

**ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ**

Η ευθεία ( $\varepsilon$ ) τέμνει  
τον κύκλο ( $c$ ),  
μόνο όταν  
 $d(K, \varepsilon) < \rho$



ii) η ευθεία εφάπτεται του κύκλου αν, και μόνο αν

$$d(O,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\kappa|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\rho$$

$$\Leftrightarrow |\kappa|=\rho\sqrt{\lambda^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2=\rho^2(1+\lambda^2)$$

iii) η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, αν, και μόνο αν

$$d(O,\varepsilon)>\rho \Leftrightarrow \frac{|\kappa|}{\sqrt{\lambda^2+1}}>\rho$$

$$\Leftrightarrow |\kappa|>\rho\sqrt{\lambda^2+1}$$

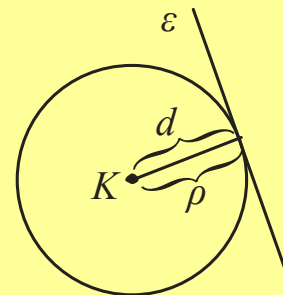
$$\Leftrightarrow \kappa^2>\rho^2(1+\lambda^2)$$

Η ευθεία (ε) εφά-

πτεται στον κύκλο

(c) μόνο όταν

$$d(K,\varepsilon)=\rho$$



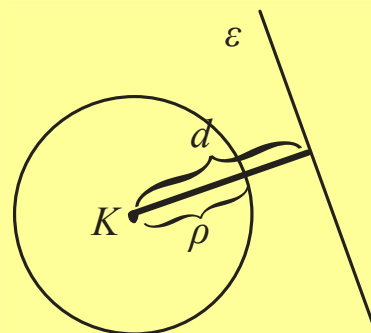
Η ευθεία (ε) δεν

έχει κοινά σημεία με

τον κύκλο (c)

μόνο όταν

$$d(K,\varepsilon)>\rho$$



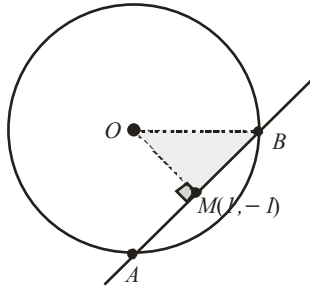


**6η Κατηγορία : Χορδές Κύκλου**

**1.7** \*Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου  $x^2 + y^2 = 4$  που έχει μέσο το σημείο  $M(1, -1)$ .

**Λύση:**

Αν η χορδή  $AB$  έχει μέσον το  $M$ , τότε είναι  $OM \perp AB$  δηλαδή το  $OM$  είναι το απόστημα της χορδής  $AB$ . Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας  $OM$  είναι  $\lambda = \frac{-1-0}{1-0} = -1$  και επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της χορδής  $AB$  θα είναι ίσος με  $1$ . Άρα, η εξίσωση της χορδής είναι:

$$y+1=1(x-1) \Leftrightarrow y=x-2.$$
**ΣΧΟΛΙΟ**

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι:

Αν  $AB$  είναι χορδή ενός κύκλου, τότε το ευθύγραμμο τμήμα  $OM$  που συνδέει το κέντρο του κύκλου με το μέσο  $M$  της χορδής  $AB$  είναι κάθετο στη χορδή αυτή και λέγεται απόστημα της χορδής.

Στην περίπτωση αυτή, (όπως φαίνεται και στην επόμενη άσκηση) μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται.

**7η Κατηγορία : Εύρεση Εξίσωσης Εφαπτομένης Κύκλου****1.8** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

i)  $x^2 + y^2 = 10$  στο σημείο του  $A(1,3)$

ii)  $x^2 + y^2 = 13$  στο σημείο του  $A(-2,\beta)$ .

**Λύση:**i) Το σημείο  $A(1,3)$  ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 10$ , γιατί οι συντεταγμένες του  $A$  ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου:

$$1^2 + 3^2 = 10.$$

Η εφαπτομένη του κύκλου στο  $A$  έχει εξίσωση  
 $x \cdot 1 + y \cdot 3 = 10 \Leftrightarrow x + 3y = 10$ ii) Το σημείο  $A(-2,\beta)$  ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 13$ , μόνο όταν οι συντεταγμένες του  $A$  ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου:

$$(-2)^2 + \beta^2 = 13 \Leftrightarrow \beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = \pm 3.$$

Άρα υπάρχουν δυο σημεία του κύκλου με τετμημένη  $-2$ :το σημείο  $A_1(-2,3)$  με εφαπτομένη την ευ-θεία  $e_1$  με εξίσωση  $-2x + 3y = 13$ ,και το σημείο  $A_2(-2,-3)$  με εφαπτομένη τηνευθεία  $e_2$  με εξίσωση  $-2x - 3y = 13$ .**ΜΕΘΟΔΟΣ**

Η εφαπτομένη του κύκλου

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \text{ στο σημείο του}$$

 $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2.$$

**ΠΡΟΣΟΧΗ:**

Η παραπάνω εξίσωση της εφαπτομένης ισχύει βέβαια με την προϋπόθεση ότι το σημείο

 $A(x_1, y_1)$  να ανήκει στον κύκλο, δηλαδή οι συντεταγμένεςτου  $A$  να ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου:

$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2.$$

**1.9** \* Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $x^2+y^2=5$  σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = 2x + 3$ .  
 ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία  $y = \frac{1}{2}x$ .

**Λύση:**

i) α' τρόπος: (με σημείο επαφής)

Αν  $A(x_1, y_1)$  είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $A$  θα έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = 5$  και επειδή είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = 2x + 3$  θα ισχύει  $-\frac{x_1}{y_1} = 2$ . Άρα  $x_1 = -2y_1$  (1).

Επίσης το σημείο  $A(x_1, y_1)$  ανήκει στον κύκλο οπότε  $x_1^2 + y_1^2 = 5$  (2).

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), έχουμε: 
$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2y_1 \\ (-2y_1)^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2y_1 \\ y_1 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 & \text{ή} & x_1 = 2 \\ y_1 = 1 & & y_1 = -1 \end{cases}$$

Οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα  $A(-2, 1)$  και  $B(2, -1)$  και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες είναι οι  $-2x + y = 5$  και  $2x - y = 5$ .

β' τρόπος: (με διπλή λύση συστήματος)

Η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = 2x + 3$ , άρα έχει εξίσωση της μορφής  $y = 2x + \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Για να εφάπτεται του κύκλου  $x^2 + y^2 = 5$ , αρ-

### ΜΕΘΟΔΟΣ

Για ευθεία (ε) εφάπτεται σε ένα κύκλο (c) αν, και μόνο αν, το σύστημα των εξισώσεών τους έχει διπλή λύση. (δηλαδή με α-

κεί το σύστημα  $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2x+\beta \end{cases}$  να έχει διπλή λύση.

ντικατάσταση, προκύπτει εξίσωση 2<sup>ης</sup> βαθμού με διακρίνουσα ίση με 0)

$$\text{Για το σύστημα έχουμε: } \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2x+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2x+\beta)^2=5 \\ y=2x+\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x^2+4\beta x+\beta^2=5 \\ y=2x+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+4\beta x+\beta^2-5=0 \\ y=2x+\beta \end{cases}$$

Επομένως αρκεί η εξίσωση  $5x^2+4\beta x+\beta^2-5=0$  να έχει διακρίνουσα

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (4\beta)^2-4\cdot 5\cdot(\beta^2-5)=0 \Leftrightarrow -4\beta^2+100=0$$

$$\Leftrightarrow \beta^2=25 \Leftrightarrow \beta=5 \text{ ή } \beta=-5.$$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του κύκλου παράλληλες προς την ευθεία

$y=2x+3$ : οι ευθείες με εξισώσεις  $y=2x+5$  και  $y=2x-5$ .

ii) Αν  $A(x_I, y_I)$  είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη του κύκλου στο Α θα

έχει εξίσωση  $xx_I+yy_I=5$  και, επειδή είναι κάθετη στην ευθεία  $y=\frac{1}{2}x$ ,

$$\text{θα είναι } \left(-\frac{x_I}{y_I}\right) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow -\frac{x_I}{2y_I} = -1 \Leftrightarrow x_I = 2y_I \quad (1).$$

Επειδή το σημείο  $A(x_I, y_I)$  είναι σημείο του κύκλου, θα ισχύει  $x_I^2+y_I^2=5$ .

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), έχουμε:

$$\begin{cases} x_I=2y_I \\ x_I^2+y_I^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=2y_I \\ 4y_I^2+y_I^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=2y_I \\ y_I=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=2 & \text{ή} & x_I=-2 \\ y_I=1 & & y_I=-1 \end{cases}$$

Οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα  $A(2,1)$  και  $B(-2,-1)$  και οι αντί-

στοιχες εφαπτόμενες είναι οι  $2x+y=5$  και  $-2x-y=5$ .

**1.10** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5 \quad \text{στο σημείο του } A(1, -1).$$

**Λύση:**

Το σημείο  $A(1, -1)$  ανήκει στον κύκλο

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ , γιατί οι συντεταγμένες του  $A$  ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου:

$$(1-2)^2 + (-1+3)^2 = 1 + 4 = 5.$$

Η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) διέρχεται από το σημείο επαφής  $A(1, -1)$  και είναι κάθετη στην ακτίνα  $KA$ .

Η ακτίνα  $KA$  έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AK} = \frac{-3+1}{2-1} = -2, \quad \text{οπότε η εφαπτομένη}$$

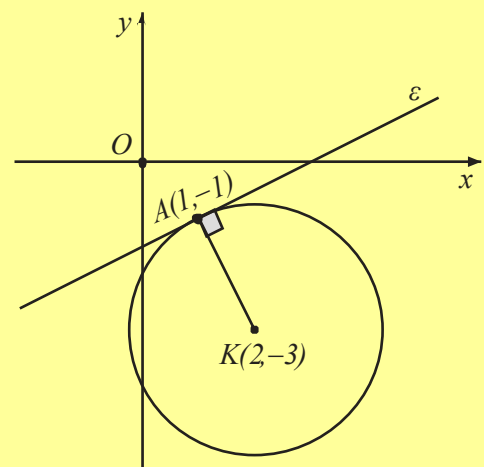
( $\varepsilon$ ) έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_{\varepsilon} = \frac{1}{2}$ .

Άρα η εξίσωση της ( $\varepsilon$ ) είναι:

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

### ΜΕΘΟΔΟΣ

Για την εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου κέντρου  $K$ , σε ένα σημείο του  $A$ , μπορούμε να στηριχτούμε και στην καθετότητα της εφαπτομένης στην ακτίνα  $KA$ , και έτσι να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης.



## 8η Κατηγορία : Εξισώσεις εφαπτομένων που άγονται από σημείο εκτός κύκλου

**1.11** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = 5$  που διέρχονται από το σημείο  $A(3,1)$ , και να αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

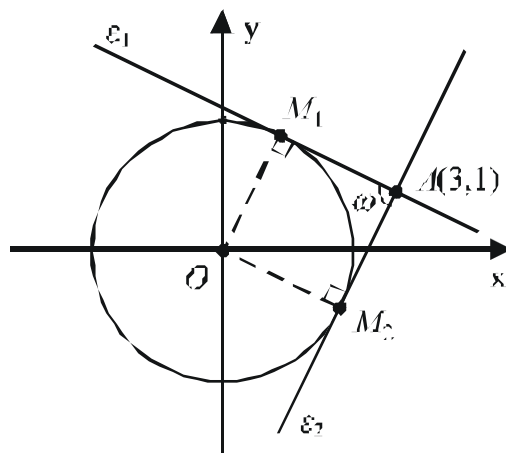
**Λύση:**

α' τρόπος: Έστω  $\varepsilon_1$  μια εφαπτομένη του κύκλου  $C$  που διέρχεται από το σημείο  $A$ . Αν  $M(x_1, y_1)$  είναι το σημείο επαφής, τότε η  $\varepsilon_1$  θα έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = 5 \quad (1)$$

και επειδή διέρχεται από το σημείο  $A(3,1)$ ,

$$\text{θα ισχύει} \quad 3x_1 + y_1 = 5. \quad (2)$$



$$\text{Όμως, το σημείο } M(x_1, y_1) \text{ ανήκει στον κύκλο } C. \text{ Άρα } x_1^2 + y_1^2 = 5. \quad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x_1 + y_1 = 5 \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ 10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1 = 1 \text{ ή } x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 & \text{ή} & y_1 = -1 \\ x_1 = 1 & & x_1 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχουν δύο σημεία επαφής, άρα και δυο εφαπτομένες του κύκλου  $C$  που διέρχονται από το σημείο  $A(3,1)$ :

Η εφαπτομένη στο σημείο  $M_1(1,2)$  με εξίσωση (από την (1))  $\varepsilon_1: x + 2y = 5$  και η εφαπτομένη στο σημείο  $M_2(2,-1)$  με εξίσωση (από την (1))  $\varepsilon_2: 2x - y = 5$ .

Επειδή οι συντελεστές διεύθυνσης των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$  και  $\lambda_2 = 2$ , οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι κάθετες.

β' τρόπος: Από το σημείο  $A(3,1)$  διέρχονται άπειρες ευθείες: Η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση  $x=3$  (1) και οι πλάγιες ευθείες με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  και εξισώσεις της μορφής  $y-1=\lambda(x-3) \Leftrightarrow \lambda x-y-3\lambda+1=0$  (2).

► Η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση  $x=3$  δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου

$C: x^2 + y^2 = 5$ , γιατί απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με

$d(O,\varepsilon)=3 \neq \rho$ , αφού  $\rho=\sqrt{5}$ .

► Για να είναι μια ευθεία με εξίσωση της μορφής (2) εφαπτομένη του κύκλου

$C: x^2 + y^2 = 5$ , πρέπει:

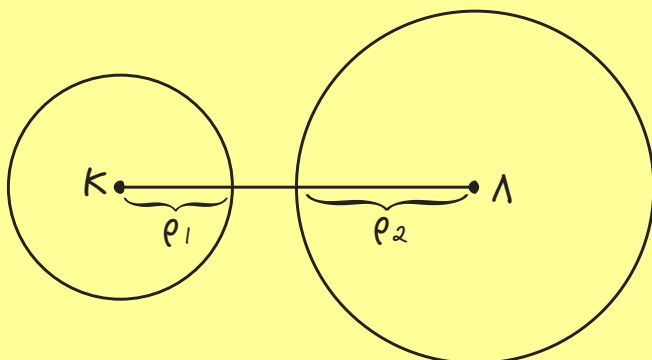
$$\begin{aligned} d(O,\varepsilon)=\rho &\Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 - 3\lambda + 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |-3\lambda + 1| = \sqrt{5} \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow |-3\lambda + 1|^2 = (\sqrt{5})^2 (\sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 5(\lambda^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχουν δυο εφαπτομένες του κύκλου  $C$  με εξισώσεις της μορφής (2) που διέρχονται από το σημείο  $A(3,1)$ :

Για  $\lambda=2$  η ευθεία  $\varepsilon_1: 2x-y-3 \cdot 2+1=0 \Leftrightarrow 2x-y-5=0$  και

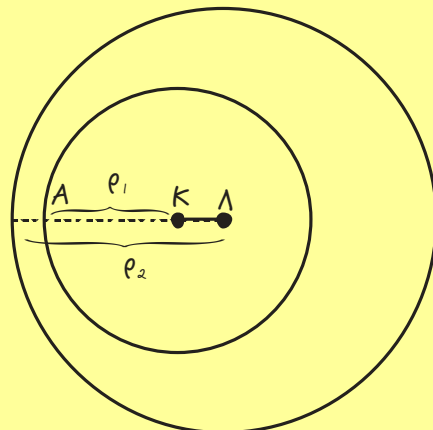
για  $\lambda=-\frac{1}{2}$  η ευθεία  $\varepsilon_2: -\frac{1}{2}x-y-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$ .

Επειδή οι συντελεστές διεύθυνσης των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι  $\lambda_1=2$  και  $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ , οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι κάθετες.

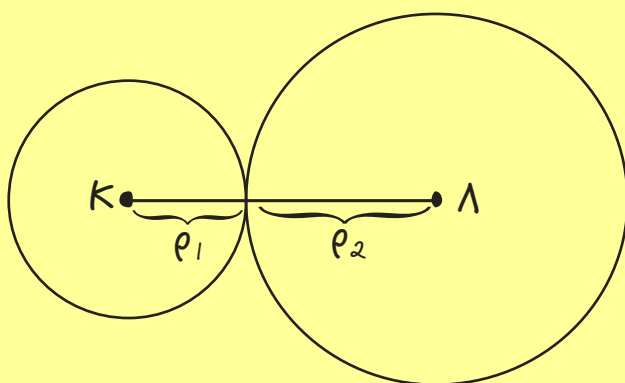
**9η Κατηγορία : Σχετική Θέση δύο κύκλων****ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ**

Δύο κύκλοι είναι ξένοι μεταξύ τους όταν

$$(KL) > \rho_1 + \rho_2$$

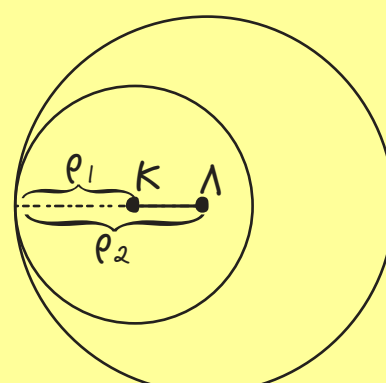


$$\text{ή όταν } (KL) < |\rho_2 - \rho_1|$$



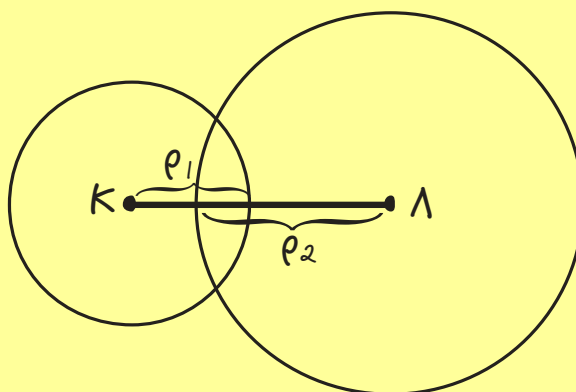
Δύο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους εξωτερικά,

$$\text{όταν } (KL) = \rho_1 + \rho_2$$



Δύο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους

$$\text{εσωτερικά, όταν } (KL) = |\rho_1 - \rho_2|$$



$$\text{Δύο κύκλοι τέμνονται όταν } |\rho_1 - \rho_2| < (KL) < \rho_1 + \rho_2$$



**1.12** \*Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων:

$$c_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{και} \quad c_2: (x-1)^2 + y^2 = 4.$$

**Λύση:**

Ο κύκλος  $c_1$  έχει κέντρο το σημείο  $O(0,0)$

και ακτίνα  $\rho_1=1$ , ενώ ο κύκλος  $c_2$  έχει

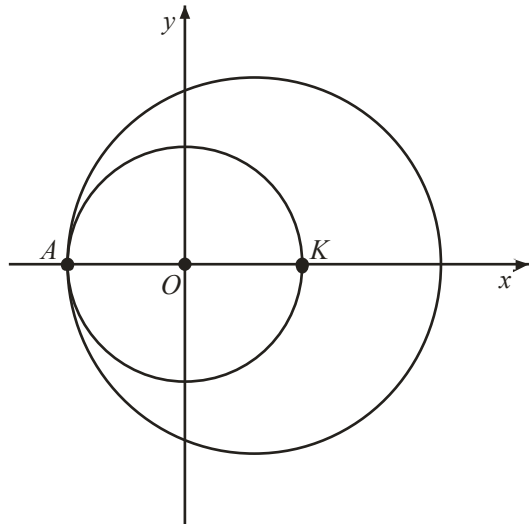
κέντρο το σημείο  $K(1,0)$  και ακτίνα  $\rho_2=2$ .

Η απόσταση των κέντρων τους (διάκεντρος)

$$\text{είναι } (OK) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1 \quad \text{και η}$$

διαφορά των ακτίνων τους είναι  $\rho_2 - \rho_1 = 1$ .

$$\text{Δηλαδή } (OK) = \rho_2 - \rho_1$$



Άρα ο κύκλος  $c_1$  εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου  $c_2$ . Το σημείο επαφής των κύκλων, έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2x + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 + y^2 = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα οι κύκλοι  $c_1$  και  $c_2$  εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο  $A(-1,0)$ .

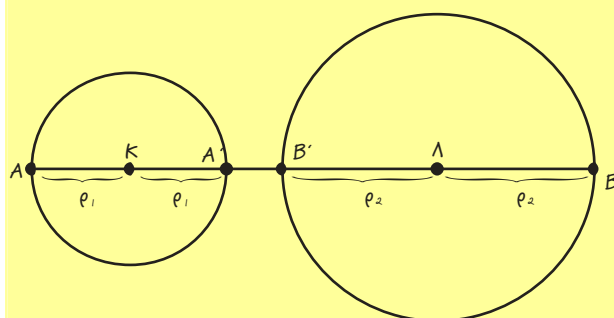
### ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Δίνονται δυο κύκλοι  $c_1$  και  $c_2$ , με κέντρα  $K$ ,  $\Lambda$  και ακτίνες  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  αντίστοιχα.

Αν  $A$  τυχαίο σημείο του κύκλου  $c_1$  και  $B$  τυχαίο σημείο του κύκλου  $c_2$ , όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα σε όλα τα παρακάτω σχήματα:

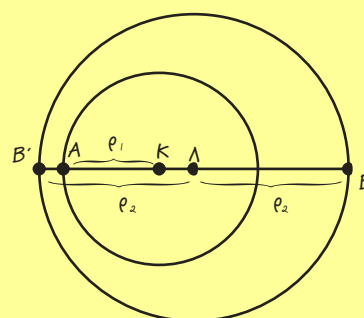
Η μέγιστη τιμή της απόστασης των σημείων  $A$  και  $B$  είναι  $(AB) = (K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2$

Για την ελάχιστη τιμή όμως της απόστασης των σημείων  $A$  και  $B$ , έχουμε:



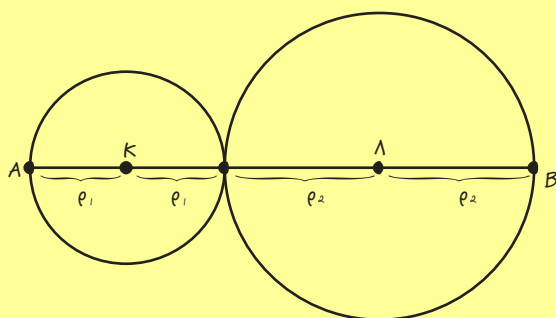
Όταν  $(K\Lambda) > \rho_1 + \rho_2$

ελάχιστη τιμή:  $(A'B') = (K\Lambda) - \rho_1 - \rho_2$



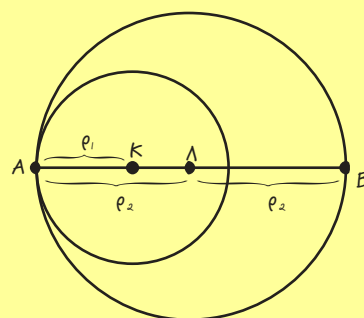
Όταν  $(K\Lambda) < |\rho_2 - \rho_1|$

ελάχιστη τιμή:  $(AB') = |\rho_2 - \rho_1| - (K\Lambda)$



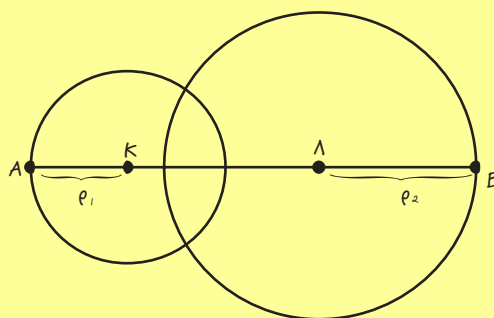
Όταν  $(K\Lambda) = \rho_1 + \rho_2$

ελάχιστη τιμή:  $(A'B') = 0$



Όταν  $(K\Lambda) = |\rho_1 - \rho_2|$

ελάχιστη τιμή:  $(AB') = 0$



Όταν  $|\rho_1 - \rho_2| < (K\Lambda) < \rho_1 + \rho_2$  ελάχιστη τιμή:  $(A'B') = 0$

**1.13** Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$  και  $C_2: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ .

- i) Να βρείτε το μήκος της διακέντρου.
- ii) Να δείξετε ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο.
- iii) Δίνονται τα μεταβλητά σημεία  $A$  και  $B$ , όπου το  $A$  ανήκει στον  $C_1$  και το  $B$  στον  $C_2$ . Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της απόστασης  $(AB)$ .

**Λύση:**

- i) Ο κύκλος  $C_1$  έχει κέντρο την αρχή  $K(-1,0)$  των αξόνων, ενώ ο κύκλος  $C_2$  έχει κέντρο το σημείο  $\Lambda(3,2)$ . Επομένως η διάκεντρος έχει μήκος

$$(K\Lambda) = \sqrt{(3+1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

- ii) Οι ακτίνες των δυο κύκλων  $C_1$  και  $C_2$  είναι  $\rho_1=1$  και  $\rho_2=2$  αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$(K\Lambda) > \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} > 1+2 \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 > 3^2 \Leftrightarrow 20 > 9.$$

Επομένως οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  δεν έχουν κοινό σημείο και μάλιστα τα σημεία του ενός είναι εξωτερικά των σημείων του άλλου.

- iii) Η μέγιστη τιμή της  $(AB)$  είναι  $(K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{5} + 1 + 2 = 2\sqrt{5} + 3$ ,

$$\text{ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι } (K\Lambda) - \rho_1 - \rho_2 = 2\sqrt{5} - 1 - 2 = 2\sqrt{5} - 3$$

**10η Κατηγορία : Κοινές Εφαπτομένες δύο Κύκλων****1.14** \*Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \text{ και } C_2: x^2 + (y+1)^2 = 3^2.$$

i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  του κύκλου  $C_1$  στο σημείο του  $A(5, -1)$ .

ii) Να αποδειχτεί ότι η  $\varepsilon$  εφάπτεται και του κύκλου  $C_2$ .

**Λύση:**

i) Ο κύκλος  $C_1$  έχει κέντρο  $K(2,3)$ .

Το σημείο  $A(5, -1)$  ανήκει προφανώς στον

κύκλο  $C_1$  γιατί  $(5-2)^2 + (-1-3)^2 = 25$ .

Η ακτίνα  $KA$  έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{KA} = \frac{-1-3}{5-2} = -\frac{4}{3}, \text{ οπότε η εφαπτομένη } \varepsilon \text{ του}$$

$C_1$  στο  $A$ , που είναι κάθετη στην ακτίνα  $KA$

έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$ , και επειδή

διέρχεται από το σημείο  $A(5, -1)$ , η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

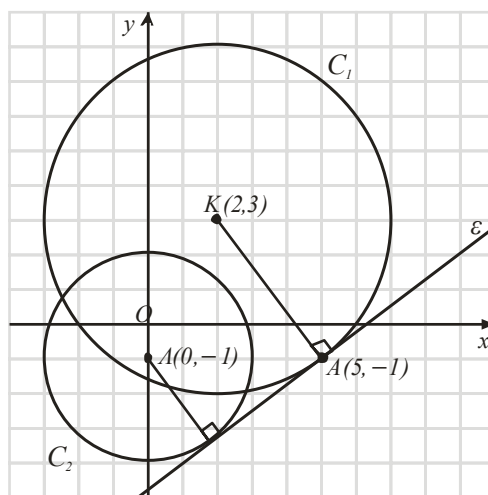
$$y - (-1) = \frac{3}{4}(x - 5) \Leftrightarrow 4(y+1) = 3(x-5) \Leftrightarrow 3x - 4y - 19 = 0 \quad (2)$$

ii) Ο κύκλος  $C_2$  έχει κέντρο  $A(0, -1)$  και ακτίνα 3.

Η απόσταση του κέντρου  $A(0, -1)$  του  $C_2$  από την  $\varepsilon$  είναι ίση με

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 0 - 4(-1) - 19|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

Άρα η  $\varepsilon$  εφάπτεται του κύκλου  $C_2$ , γιατί η απόσταση του κέντρου  $A(0, -1)$  του  $C_2$  από την  $\varepsilon$  είναι ίση με την ακτίνα του  $C_2$ , δηλαδή ίση με 3.



**11η Κατηγορία : Οικογένειες Κύκλων**

**1.15** \*Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\lambda$ , η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και η ακτίνα.

ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι  $C_\lambda$  που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$  διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

Ποια είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

**Λύση:**

i) Η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$  είναι της μορφής  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ , με  $A = -2\lambda$ ,  $B = 0$  και  $\Gamma = -1$ .

Είναι  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + 0^2 - 4 \cdot (-1) = 4(\lambda^2 + 1) > 0$ . Άρα παριστάνει

κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(\lambda, 0)$  και ακτίνα  $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{4(\lambda^2 + 1)} = \sqrt{\lambda^2 + 1}$ .

ii) Θα θεωρήσουμε δύο από τους παραπάνω κύκλους και αφού βρούμε τα κοινά τους σημεία θα αποδείξουμε ότι κάθε άλλος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) διέρχεται από τα σημεία αυτά. Για  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$  έχουμε τους κύκλους:  $C_0: x^2 + y^2 - 1 = 0$  και  $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$  (2).

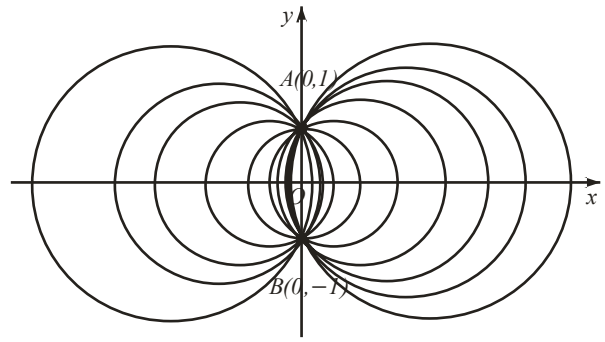
Τα σημεία τομής των κύκλων αυτών έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array} \right.$$

Άρα, οι κύκλοι  $C_0$  και  $C_1$  τέμνονται στα σημεία  $A(0, 1)$  και  $B(0, -1)$ .

Από τα σημεία αυτά διέρχονται  
όλοι οι κύκλοι που ορίζο-  
νται από την εξίσωση (1),  
αφού οι συντεταγμένες των  
A και B επαληθεύουν την  
εξίσωση



$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0 \quad (1) \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Πράγματι } 0^2 + 1^2 - 2\lambda \cdot 0 - 1 = 0 \quad \text{και} \quad 0^2 + (-1)^2 - 2\lambda \cdot 0 - 1 = 0.$$

Η εξίσωση της κοινής χορδής είναι η  $x=0$ .

**12η Κατηγορία : Γεωμετρικοί Τόποι**

**1.16** Δίνονται τα σημεία  $A(-2,1)$  και  $B(-5,-2)$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $(MA)=2(MB)$ .

**Λύση:**

Έστω  $M(x,y)$  τυχαίο σημείο το ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.

Τότε  $(MA)=2(MB)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-(-2))^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-(-5))^2+(y-(-2))^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=4[(x+5)^2+(y+2)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-2y+1=4(x^2+10x+25+y^2+4y+4)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-2y+5=4x^2+4y^2+40x+16y+116$$

$$\Leftrightarrow -3x^2-3y^2-36x-18y-111=0$$

$$\stackrel{:(-3)}{\Leftrightarrow} x^2+y^2+12x+6y+37=0$$

$$\text{Είναι } A^2+B^2-4\Gamma=12^2+6^2-4\cdot 37=144+36-148=32>0.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  είναι ο κύκλος με εξίσωση

$x^2+y^2+12x+6y+37=0$  που έχει κέντρο το σημείο  $K(-6,-3)$  και ακτίνα

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{32}=\frac{1}{2}4\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

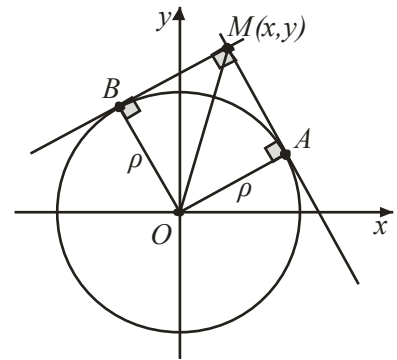
**1.17** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ , από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο  $x^2 + y^2 = \rho^2$  είναι κάθετες.

**Λύση:**

Έστω  $M(x, y)$  τυχαίο σημείο το ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Τότε οι εφαπτόμενες  $MA$  και  $MB$  προς τον κύκλο  $x^2 + y^2 = \rho^2$  είναι κάθετες.

Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν το τετράπλευρο  $OAMB$  είναι τετράγωνο ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} (OM)^2 &= (OA)^2 + (AM)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 + \rho^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2\rho^2, \end{aligned}$$



δηλαδή, ότι ο γεωμετρικός τόπος του  $M$  είναι ο κύκλος  $x^2 + y^2 = (\rho\sqrt{2})^2$ .