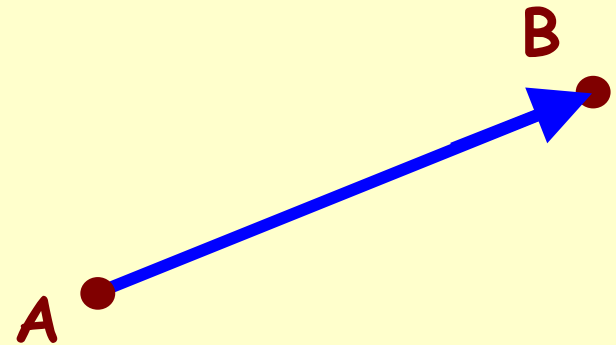


1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Τι ονομάζεται διάνυσμα;

Διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα.

Το πρώτο άκρο ονομάζεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος



Το δεύτερο άκρο ονομάζεται **τέλος** ή **πέρας** του διανύσματος

Συμβολίζεται με

$\overrightarrow{AB}$



Τι ονομάζεται μηδενικό διάνυσμα;

Ένα διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** αν η αρχή και το πέρας του συμπίπτουν.

Συμβολίζεται με $\vec{0}$



Τι ονομάζεται μέτρο ενός διανύσματος;

Μέτρο ή **μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$

Παρατήρηση:

Είναι πάντα $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$

Ισχύει $|\overrightarrow{AB}| = 0$ μόνο όταν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

Τι ονομάζεται μοναδιαίο διάνυσμα;

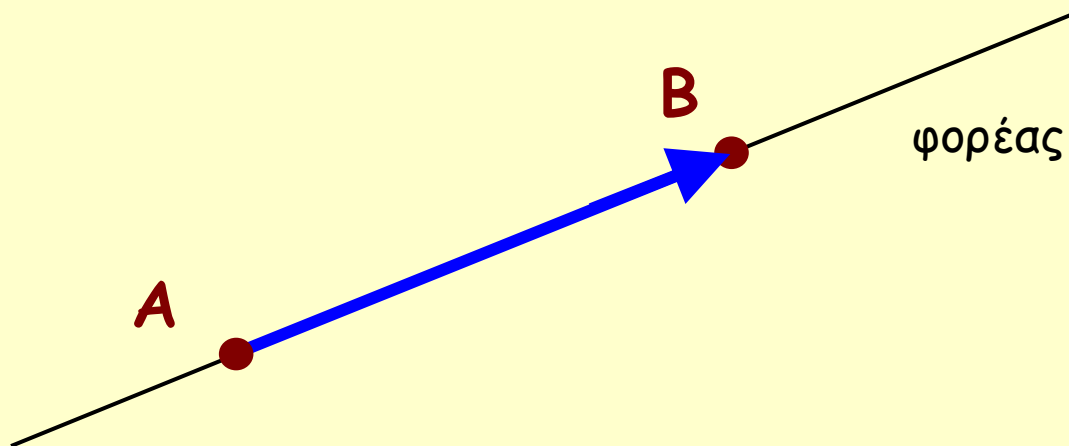
Μοναδιαίο διάνυσμα ονομάζεται κάθε διάνυσμα που έχει μέτρο 1.

Δηλαδή: $|\vec{AB}| = 1$

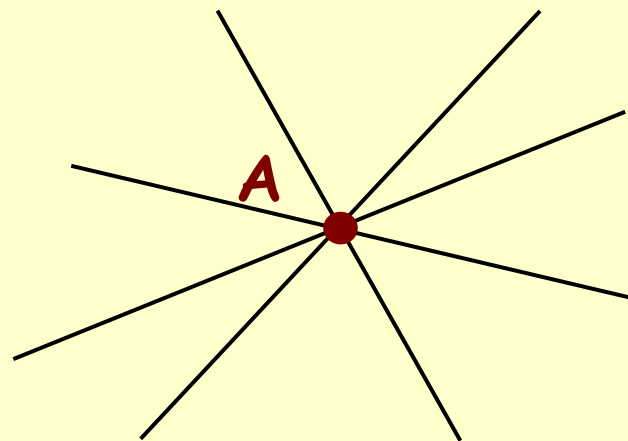


Τι ονομάζεται φορέας ενός διανύσματος;

Φορέας του μη μηδενικού διανύσματος $\vec{AB}$ ονομάζεται η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται.

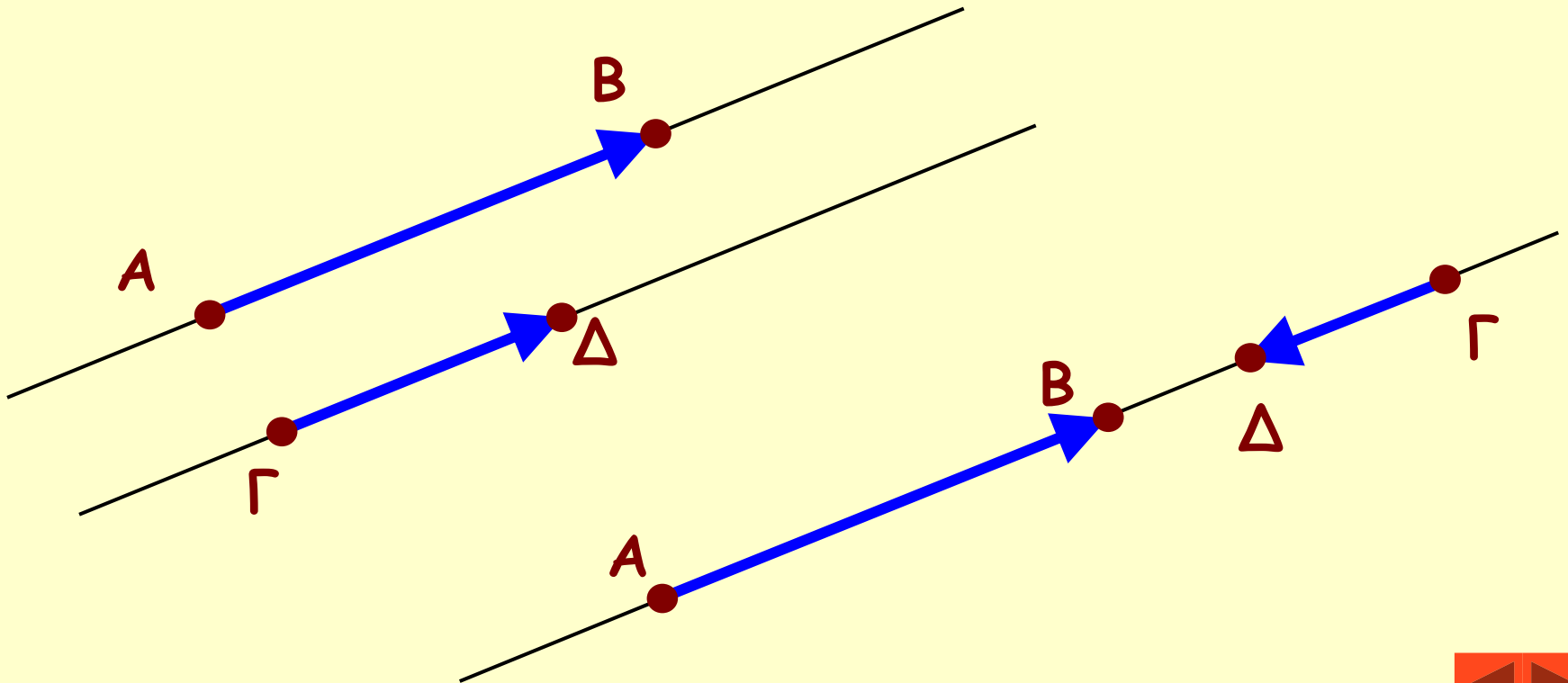


Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\vec{AA}$ μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A.



Πότε δύο διανύσματα λέγονται παράλληλα;

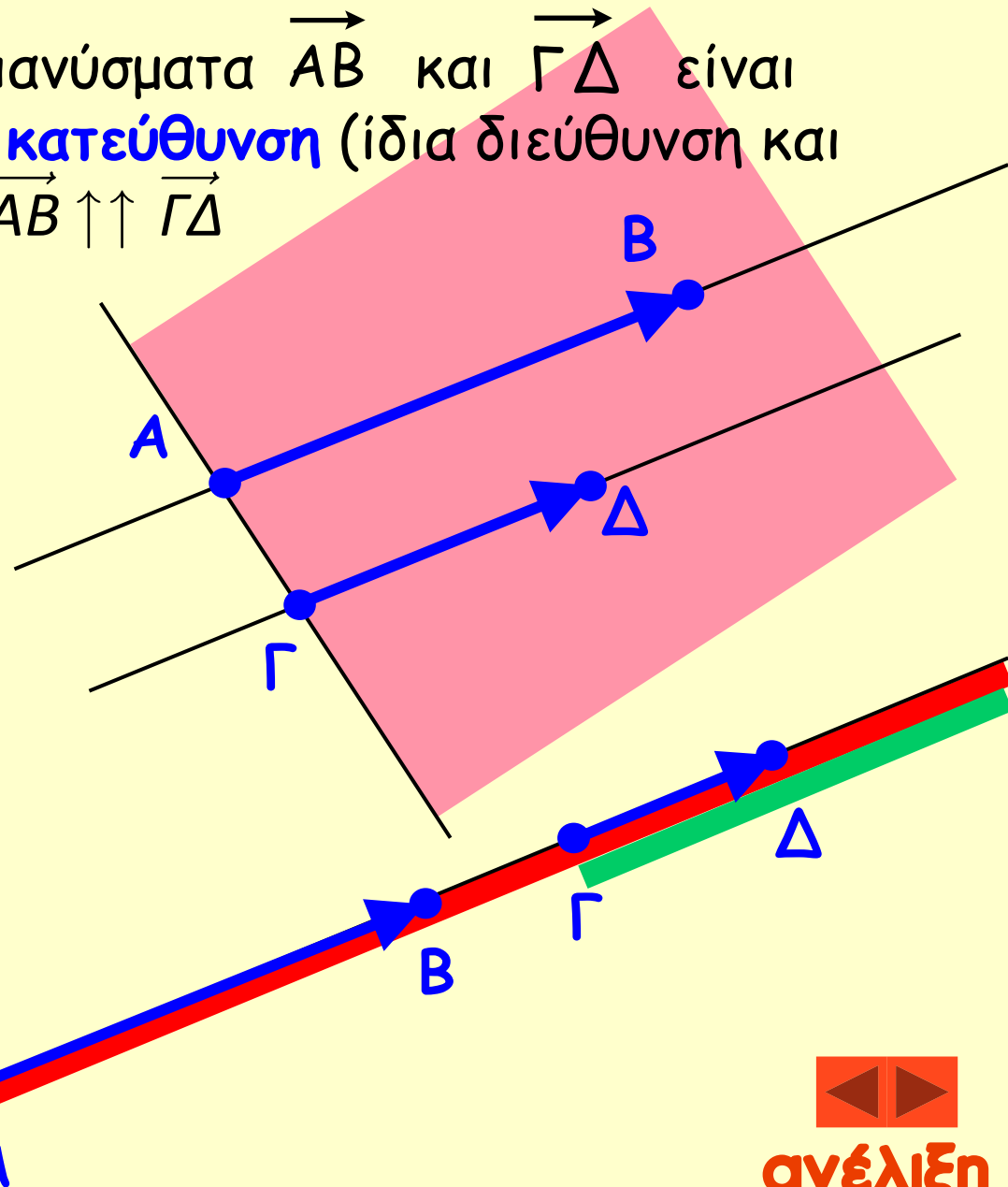
Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$, λέμε ότι είναι **παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ή έχουν **ίδια διεύθυνση** αν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς.



Πότε δύο διανύσματα λέγονται ομόρροπα;

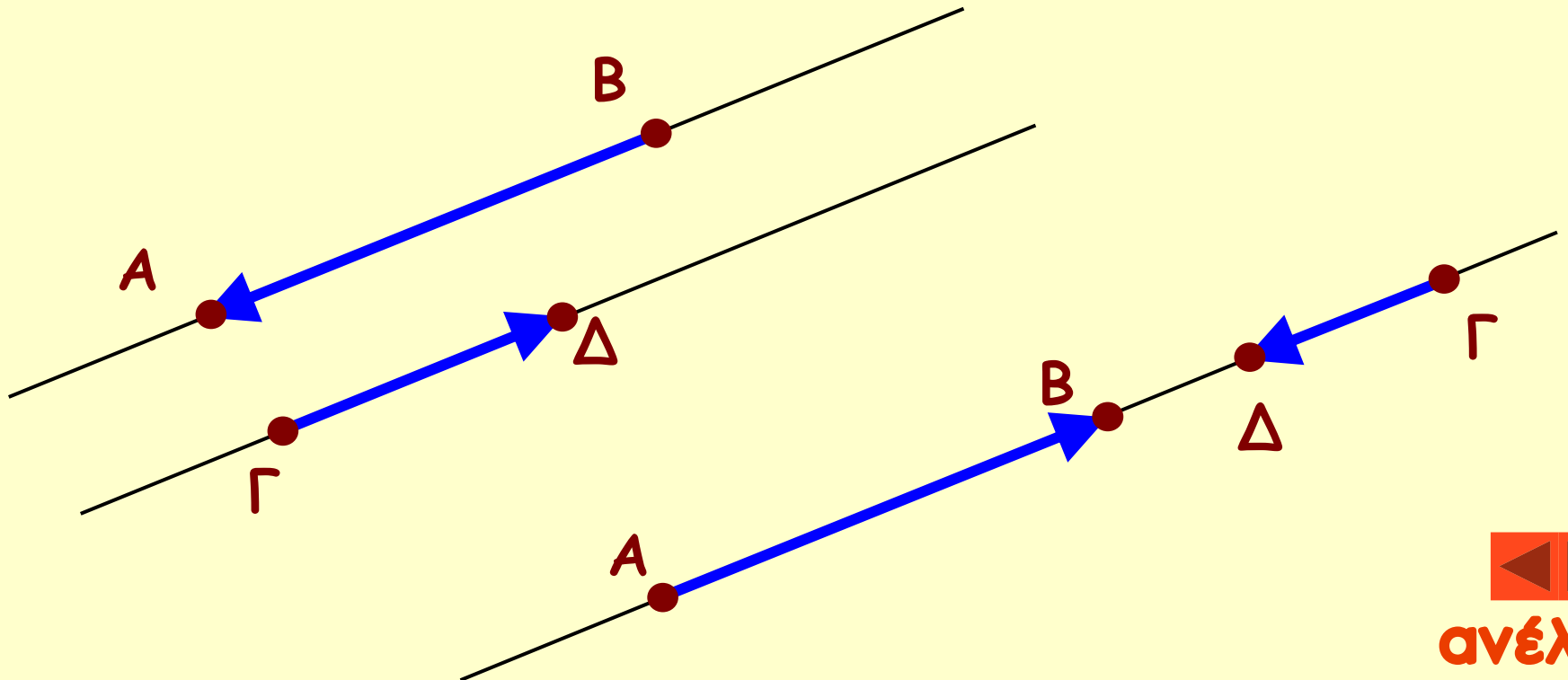
Λέμε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι **ομόρροπα** ή έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$ όταν:

- α) έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία $A\Gamma$ που ενώνει τις αρχές τους
- β) έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη.



Πότε δύο διανύσματα λέγονται αντίρροπα;

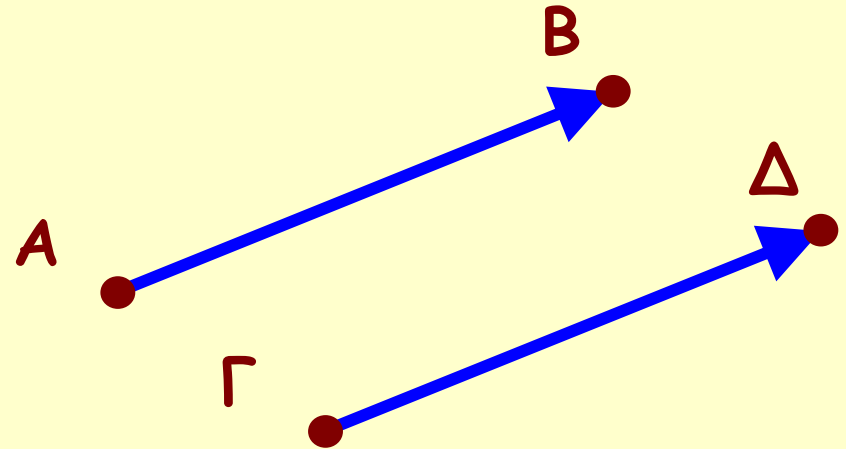
Όταν δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι συγγραμμικά αλλά δεν είναι ομόρροπα λέμε ότι είναι **αντίρροπα** ή έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\vec{AB} \updownarrow \vec{\Gamma\Delta}$



Πότε δύο διανύσματα λέγονται ίσα και πότε αντίθετα;

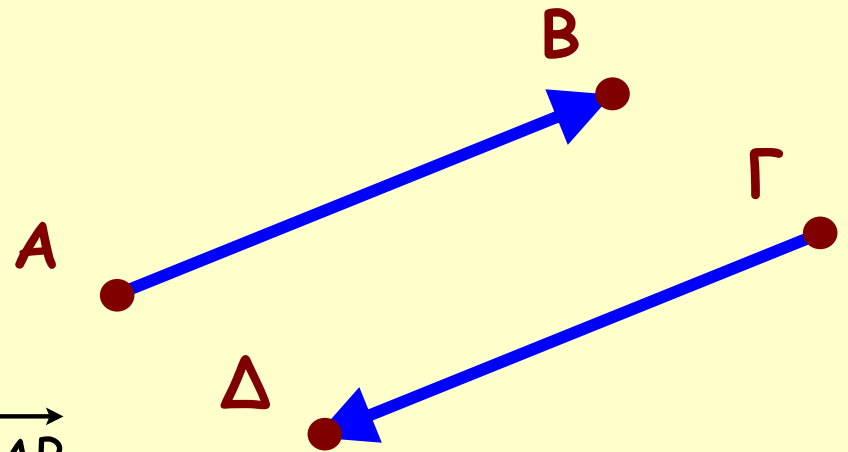
Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Γράφουμε $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$



Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **αντίθετα** όταν έχουν την αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Γράφουμε $\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$ ή $\vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB}$

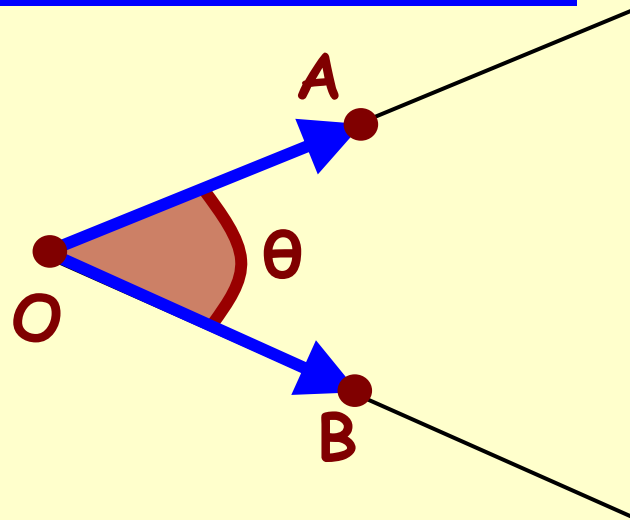


Πώς ορίζεται η γωνία δυο διανυσμάτων;

Αν έχουμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

Ονομάζουμε **γωνία** των διανυσμάτων αυτών την **κυρτή** γωνία που ορίζεται από τις ημιευθείες OA και OB

Συμβολίζεται $\theta = (\vec{a}, \vec{b})$ ή $\theta = (\vec{b}, \vec{a})$.



Παρατηρήσεις:

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \quad \text{ή} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}.$$

$$\theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \updownarrow \vec{b}.$$

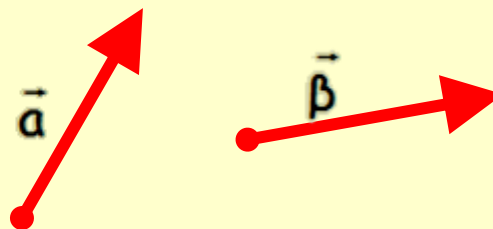
$$\text{Αν } \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ τότε } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$.

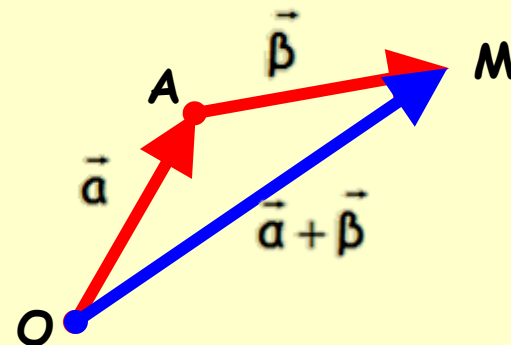
1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Πώς ορίζεται το άθροισμα δυο διανυσμάτων;

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.



Θεωρούμε τα διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$.



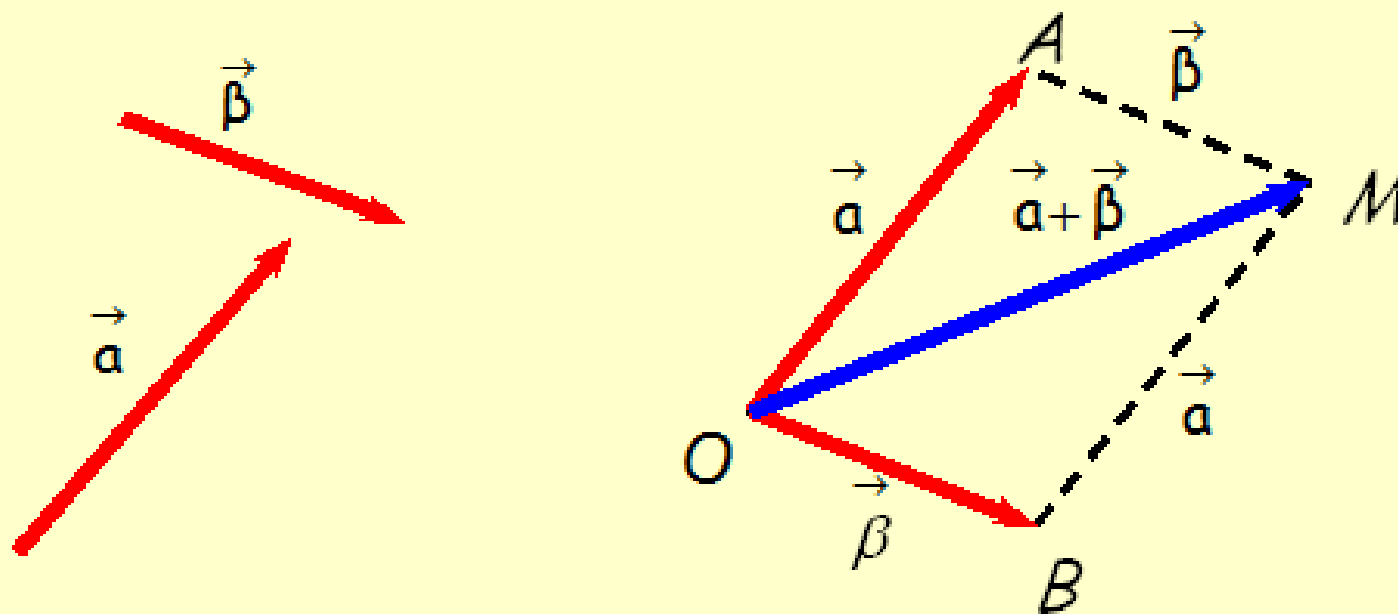
Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη**

των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και συμβολίζεται με $\vec{a} + \vec{b}$.



Παρατήρηση: Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με τον **κανόνα του παραλληλόγραμμου**: Με αρχή ένα σημείο O ,

θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Τότε το άθροισμα $\vec{a} + \vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο OM του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB .



Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

$$(1) \quad \vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a} \quad (\text{Αντιμεταθετική ιδιότητα})$$

$$(2) \quad (\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \quad (\text{Προσεταιριστική ιδιότητα})$$

$$(3) \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$(4) \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Πώς ορίζεται η διαφορά δυο διανυσμάτων;

Η διαφορά $\vec{a} - \vec{\beta}$

του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{a}$

ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $-\vec{\beta}$

Δηλαδή $\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$



Τι ονομάζεται διάνυσμα θέσεως ή διανυσματική ακτίνα ενός σημείου M ;

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου.

Τότε για κάθε σημείο M του χώρου
ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$

το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως** του
σημείου M ή **διανυσματική ακτίνα** του
σημείου M .

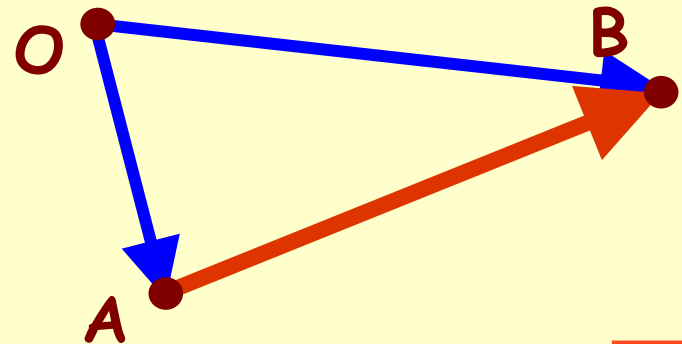
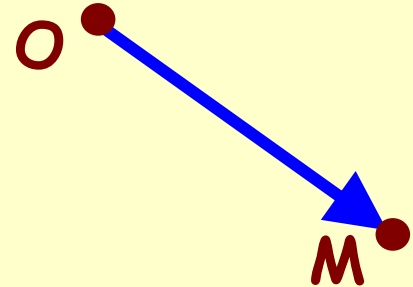
Το σημείο O , που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς,

τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$

έχουμε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

επομένως : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$



Θεώρημα:

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ισχύει:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Απόδειξη:

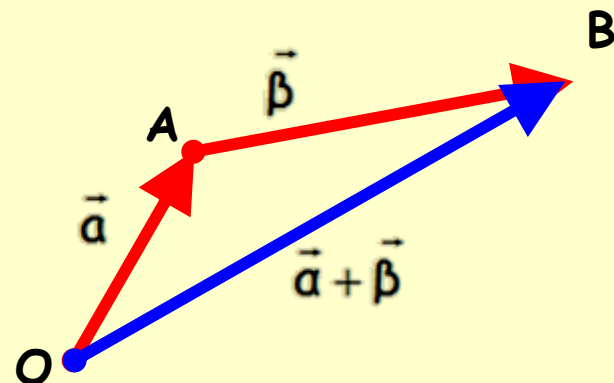
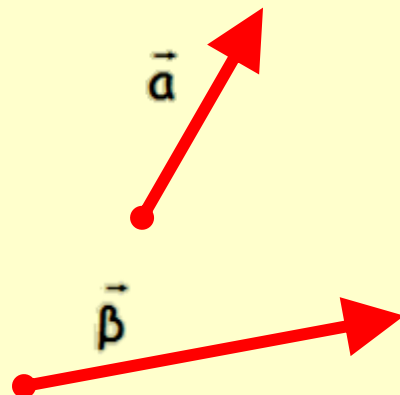
Κατασκευάζουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OAB, γνωρίζουμε όμως ότι

$$|(OA) - (AB)| \leq (OB) \leq (OA) + (AB)$$

και επομένως:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$



Παρατήρηση:

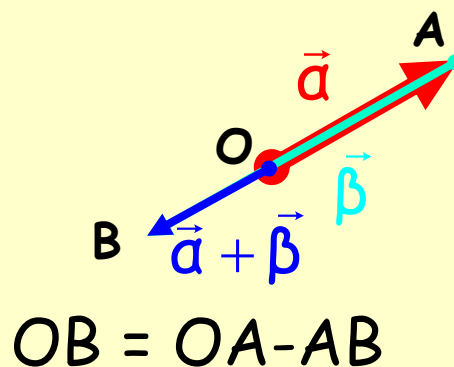
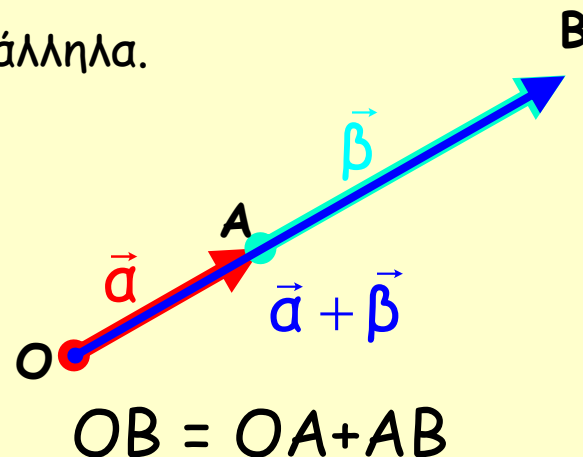
Στην ανισότητα $\left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$

οι ισότητες ισχύουν μόνο όταν τα διανύσματα είναι παράλληλα.

Ακριβέστερα:

$$|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \quad (\text{ομόρροπα})$$

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| = |\vec{a} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \quad (\text{αντίρροπα})$$



1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Πώς ορίζεται το γινόμενο ενός αριθμού επί διάνυσμα;

Έστω ένας πραγματικός αριθμός λ με $\lambda \neq 0$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$

Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{a}$

ένα διάνυσμα το οποίο:

- (i) είναι ομόρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda > 0$
και αντίρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda < 0$ και
- (ii) έχει μέτρο $|\lambda| |\vec{a}|$

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε: $0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{a}$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{a}}{\lambda}$

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

- $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

Επιμεριστική του αριθμού ως προς το διάνυσμα

- $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$

Επιμεριστική του διανύσματος ως προς τον αριθμό

- $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

- $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$

- $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$

- $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$

- $(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$

- $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{τότε} \quad \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Διαγραφή του αριθμού

- $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \neq \vec{0} \quad \text{τότε} \quad \lambda = \mu$

Διαγραφή του διανύσματος



Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δυο διανυσμάτων;

Ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Θεώρημα: Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$,

τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

Θεώρημα: Να αποδείξετε ότι:

Αν το σημείο M είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB τότε

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

όπου O οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου.

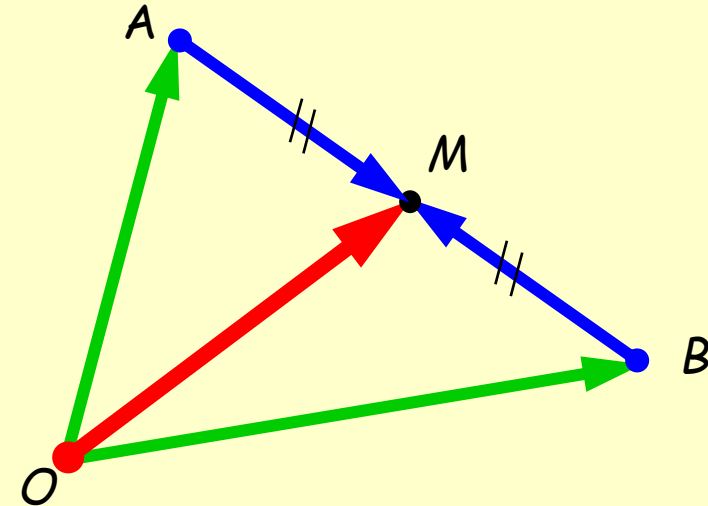
Απόδειξη:

Έχουμε:
$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{με πρόσθεση} \\ \text{κατά μέλη:} \end{array}$$

$$2 \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \cancel{\overrightarrow{AM}} + \overrightarrow{OB} + \cancel{\overrightarrow{BM}}$$

$$2 \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

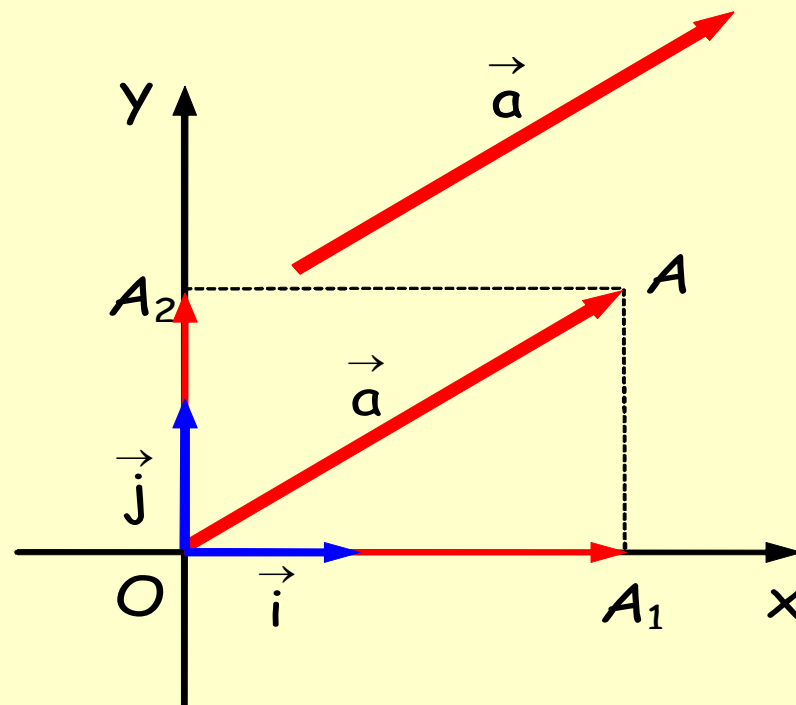
Άρα
$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$



1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Θεώρημα: Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου.

Τότε το $\vec{a}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ των αξόνων.



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$$

Άρα

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Παρατήρηση: Στη σχέση $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

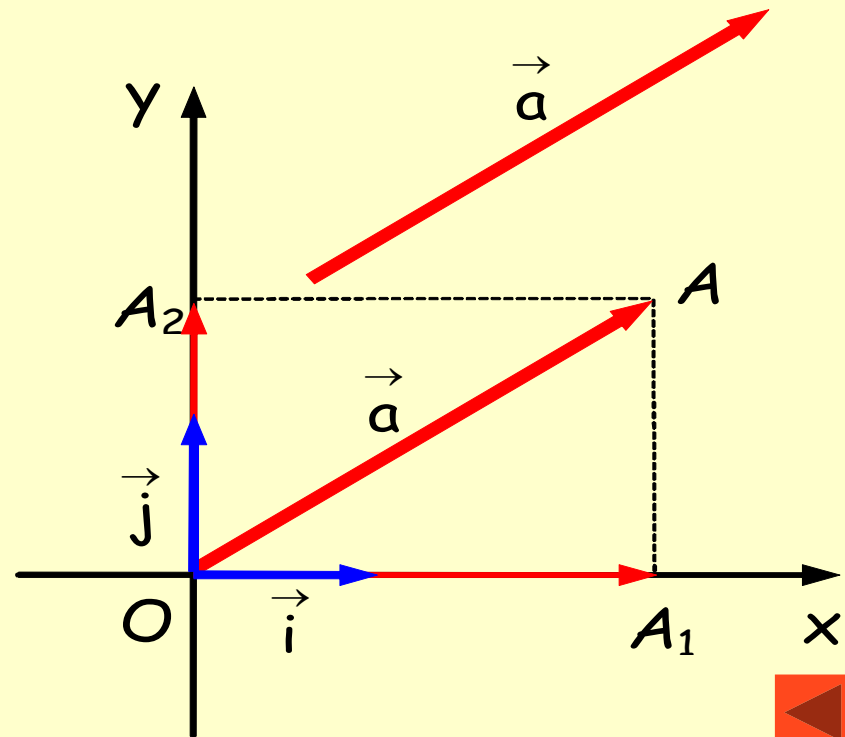
τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$ λέγονται
συνιστώσες του διανύσματος $\vec{a}$,

ενώ οι αριθμοί x και y λέγονται συντεταγμένες του $\vec{a}$
στο σύστημα Oxy .

Ο x λέγεται
τετμημένη του $\vec{a}$
και ο y λέγεται
τεταγμένη του $\vec{a}$.

Συμβολίζουμε:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$$



Ισότητα και πράξεις διανυσμάτων με συντεταγμένες

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

- $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\lambda \vec{\alpha} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Συντεταγμένες του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος

Θεώρημα: Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Τότε οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Απόδειξη:

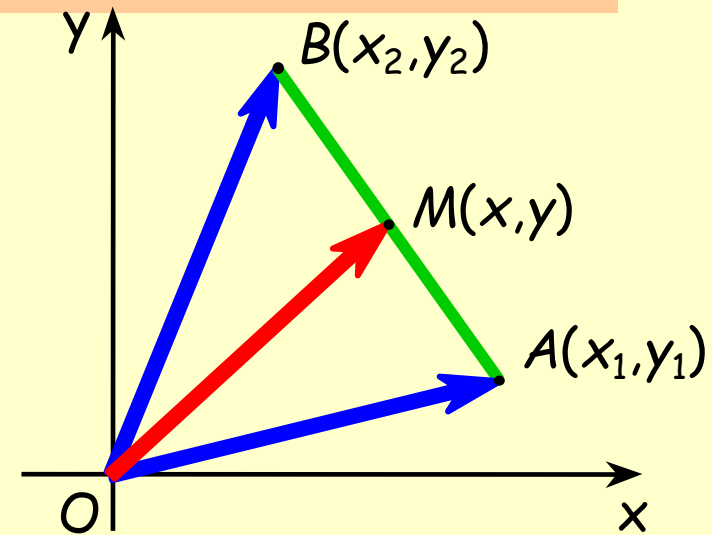
Επειδή $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

και $\vec{OA} = (x_1, y_1)$ $\vec{OB} = (x_2, y_2)$

$$\vec{OM} = (x, y)$$

έχουμε

$$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



Επομένως ισχύει

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Θεώρημα: Οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = x_2 - x_1 \quad y = y_2 - y_1$$

Απόδειξη:

Επειδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

και $\overrightarrow{AB} = (x, y)$

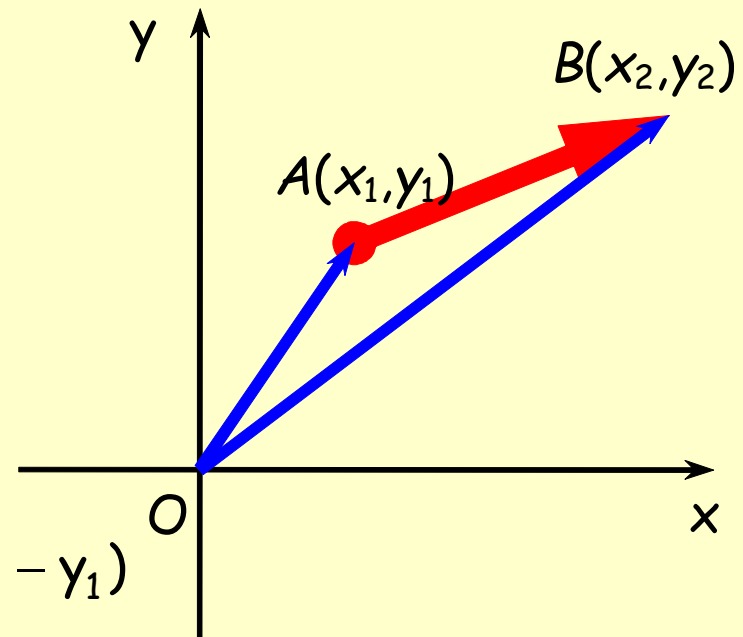
$$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1) \quad \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$$

Έχουμε:

$$\overrightarrow{AB} = (x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Επομένως: $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$

Δηλαδή: τετμημένη του $\overrightarrow{AB}$ = τετμημένη του B - τετμημένη του A
τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$ = τεταγμένη του B - τεταγμένη του A.



Μέτρο Διανύσματος

Θεώρημα:

$$\text{Αν } \vec{a} = (x, y), \text{ τότε } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Απόδειξη: Έστω A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\vec{OA} = \vec{a}$

Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, επειδή το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y , θα ισχύουν:

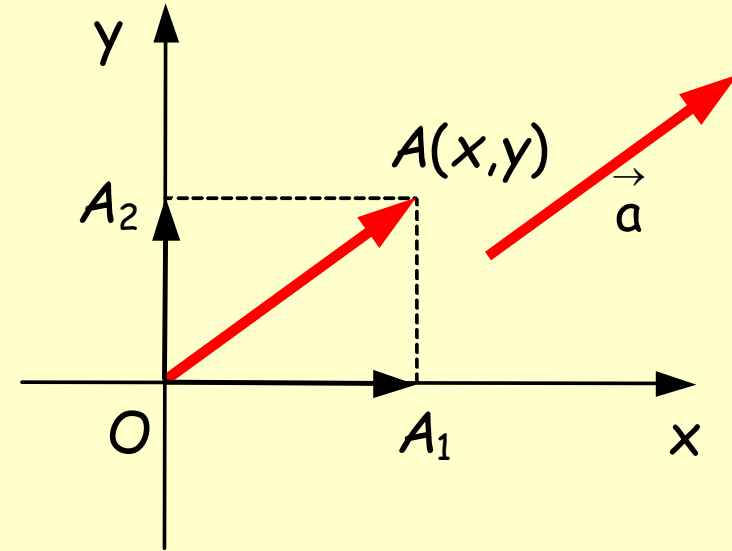
$$(OA_1) = |x| \quad (OA_2) = |y|$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= (OA)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Απόσταση δυο σημείων

Θεώρημα:

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με: $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόδειξη:

Επειδή η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, θα ισχύει:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Θεώρημα:

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$



Γωνία που σχηματίζει ένα διάνυσμα με τον άξονα $x'x$

Ορισμός:

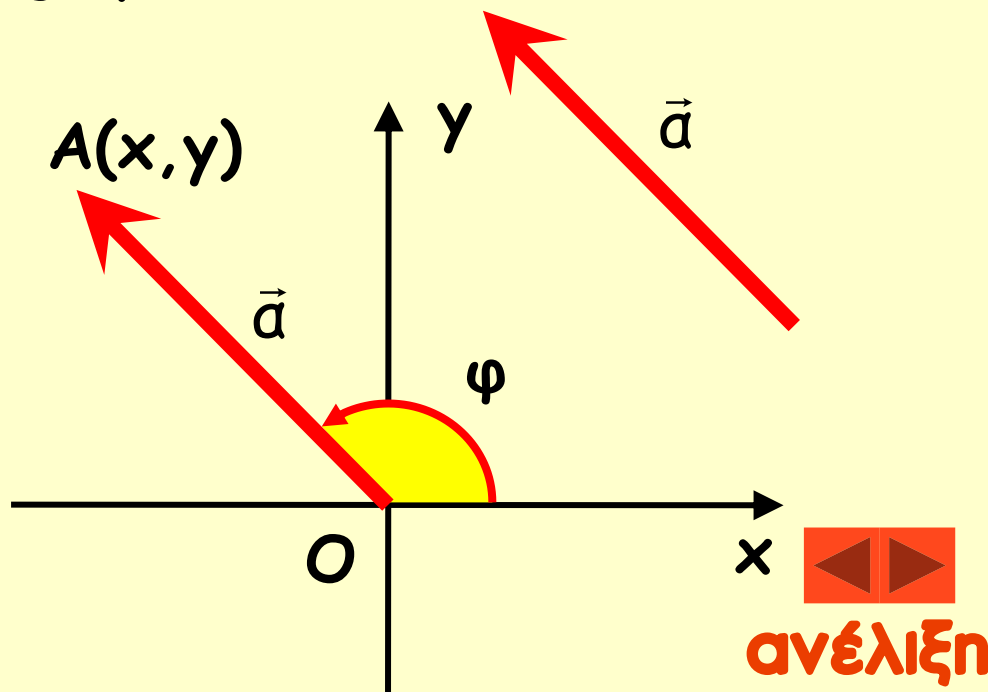
Έστω μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$ και A ένα σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Ονομάζουμε **γωνία** που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα $x'x$, τη γωνία φ , που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA .

Παρατήρηση:

Είναι φανερό ότι

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$



Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

Ορισμός:

Ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** του διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$

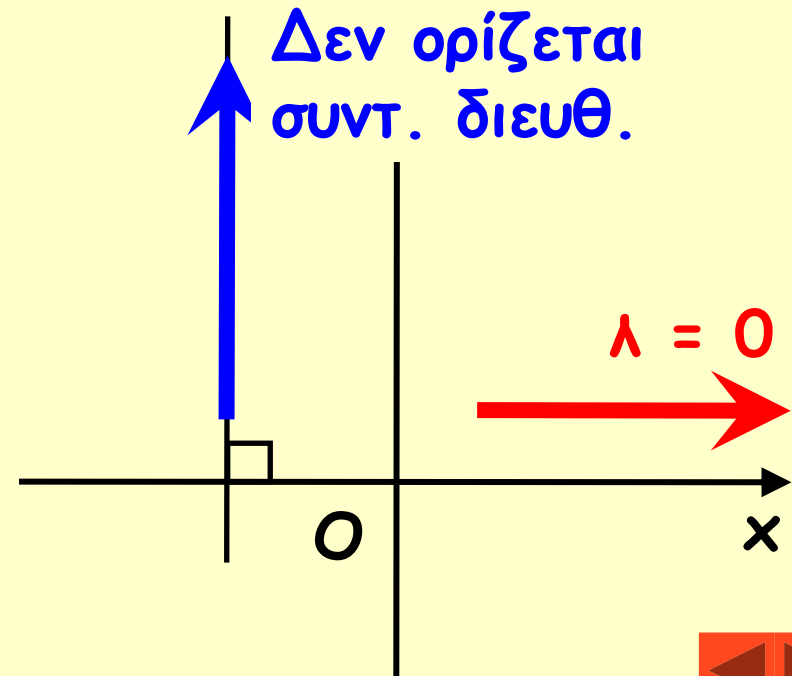
με $x \neq 0$, το πηλίκο $\lambda = \frac{y}{x} = \tan \varphi$

(όπου φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον $x'x$)

Παρατήρηση:

Είναι φανερό ότι

- Αν $y = 0$, δηλ. αν $\vec{a} // x'x$
τότε είναι ο $\lambda = 0$.
- Αν $x = 0$, δηλ. αν $\vec{a} // y'y$
τότε ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ
συντελεστής διεύθυνσης του .



Θεώρημα: Ισχύει η ισοδυναμία : $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Απόδειξη: Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές
διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως.

Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$



1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Πώς ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων;

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{a} \cdot \vec{b}$

τον πραγματικό αριθμό $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$

Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a} \quad (\text{Αντιμεταθετική ιδιότητα})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{\beta}$$

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$$

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$$

Τι ονομάζεται εσωτερικό τετράγωνο ενός διανύσματος;

Ορισμός:

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{a}$ συμβολίζεται με $\vec{a}^2$ και λέγεται **τετράγωνο** του διανύσματος $\vec{a}$

Έχουμε: $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$

Επομένως: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Παρατήρηση:

Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ ισχύουν:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1 \quad \text{και} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$



Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

Θεώρημα: Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$

ΤΟΤΕ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Απόδειξη: Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = (OA) \cdot (OB) \cdot \sin \hat{AOB}$$

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$(OA)^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad \text{και} \quad (OB)^2 = x_2^2 + y_2^2$$

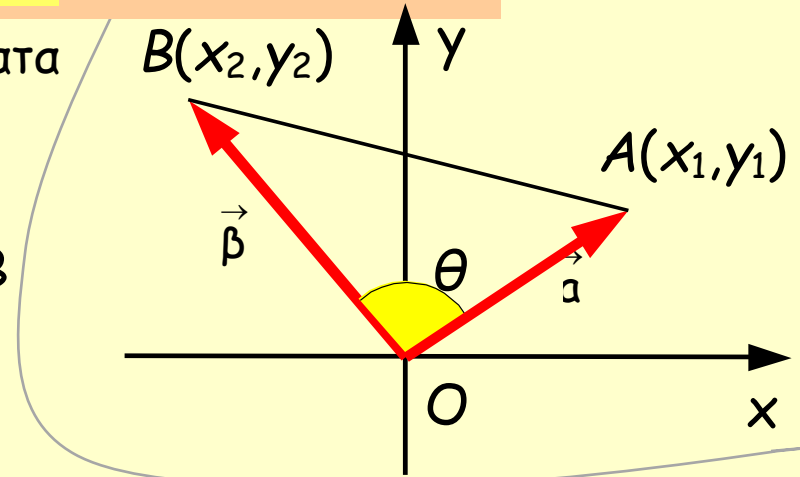
Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB

$$\text{έχουμε} \quad (AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\sin \hat{AOB}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} - 2x_1x_2 + \cancel{y_1^2} + \cancel{y_2^2} - 2y_1y_2 = \cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_2^2} - 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$



(η σχέση αυτή ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά)



Θεώρημα: Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\lambda \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{\beta}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη: Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

► $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \cdot (x_2, y_2) = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2$

► $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (x_1, y_1)(\lambda x_2, \lambda y_2) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2$

► $\lambda (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = \lambda (x_1 x_2 + y_1 y_2) = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2$

Άρα, $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{\beta})$

Θεώρημα: Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \quad (\text{Επιμεριστική Ιδιότητα})$$

Απόδειξη: Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

Θεώρημα: Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσεως λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Απόδειξη: Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 = -x_1 \cdot x_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

Θεώρημα: Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα με γωνία θ , τότε

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Απόδειξη:

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\text{Είναι όμως} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad , \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad , \quad |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Επομένως:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$



Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Ορισμός:

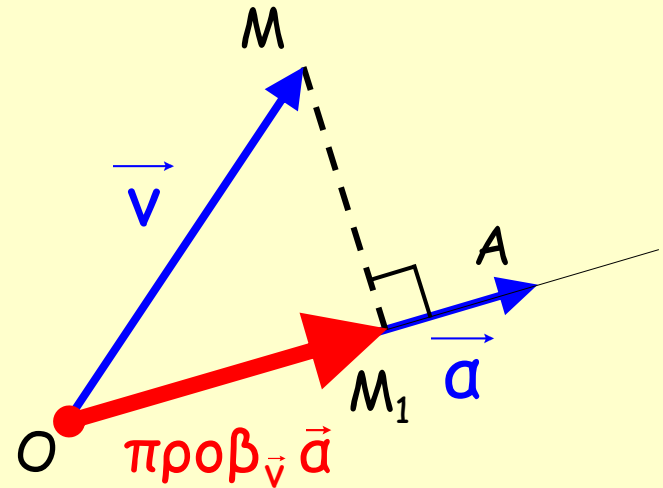
Έστω $\vec{a}, \vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$

Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$

Από το M φέρνουμε κάθετο στη
διεύθυνση του OA και έστω M_1 το
ίχνος της καθέτου.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή**
του $\vec{v}$ στο $\vec{a}$ και συμβολίζεται με
 $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$

Δηλαδή $\overrightarrow{OM_1} = \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$



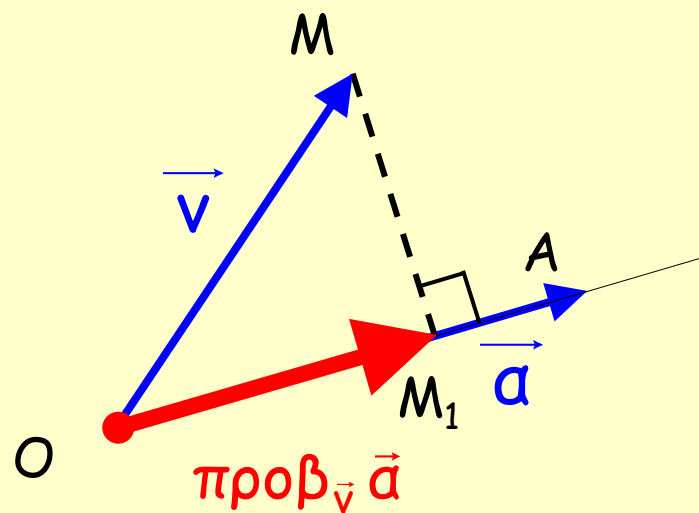
Θεώρημα:

Για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{v}$ ισχύει:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{v} &= \vec{a} \cdot (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}) \\ &= \vec{a} \cdot \overrightarrow{OM_1} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{M_1M} \\ &= \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}\end{aligned}$$



Επομένως:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \vec{v} \cdot \text{προβ}_{\vec{v}} \vec{a}$$



ανέλιξη